اصل هم ارزی و نتایج آن

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۱۸ خرداد ۱۴۰۱

۱ مقدمه

نسبیت عام هم مثل نسبیت خاص بر اصول ساده ای مبتنی است، اگر چه ممکن است ساختار ریاضی آن ، لااقل در نگاه اول، کمی پیچیده باشد. در این درس این اصول ساده را بیان می کنیم. مهم ترین این اصول، اصل هم ارزی [۱] است. اینشتین تنها از همین اصل و بدون اینکه ساختمان کامل نظریه نسبیت را ساخته باشد، نتایج مهمی گرفت که بعدها به صورت تجربی نیز تایید شدند. پذیرش این اصل بلافاصله ما را به ایده انحنای فضازمان در اطراف یک جرم مادی رهنمون خواهد شد. این که ماده چگونه فضازمان اطراف خود را دچار انحنا می کند، توسط معادلات میدان اینشتین [۲] تعیین خواهد شد. معادلات میدان اینشتین موضوع درسهای بعدی است.

۲ نیروی ماند یا اینرسیال

قطاری را تصور کنید که در حال سکون است و به ناگاه شروع به حرکت می کند. طبیعی است که در ابتدای حرکت این قطار شتاب می گیرد. اندازه این شتاب را a می گیریم. اما در لحظه شروع حرکت تمامی اشیایی که بر یک میز درون قطار قرار دارند با شتاب $-a$ به عقب حرکت می کنند. از جمله دو گوی خیلی سبک و خیلی سنگین که اصطکاک کمی با سطح میز دارند هر دو با یک شتاب رو به عقب حرکت می کنند. البته

[۱] Principle of Equivalence

[۲] Einstein Field Equations

از دید ناظر درون قطار چنین است. از دید ناظری که بیرون قطار ایستاده است، این دو گوی تنها می خواهند بنابر اصل اینرسی گالیله حالت سکون خود را حفظ کنند. این قطار است که حرکت می کند و از دید ناظر درون قطار چنین به نظر می رسد که نیرویی آن ها را به عقب رانده است. نکته خیلی مهم هم این است که این نیروی متناسب با جرم این دو گوی است و همین امر باعث شده که هر دو گوی سبک و سنگین دقیقا با یک شتاب رو به عقب حرکت کنند. همین کیفیت است که در بقیه نیروها مثل نیروی الکترومغناطیس مشاهده نمی شود و باعث می شود که ما حرکت دو گوی سنگین و سبک را به نوعی نیرو نسبت دهیم که در اثر شتاب گرفتن دستگاه مرجع (در اینجا قطار) ایجاد شده است. چنین نیرویی را نیروی اینرسیال می نامیم [۳]. نیروی اینرسیال در هر دستگاه شتابداری به همین شکل خود را نشان می دهد. وقتی که قطار ناگهان بایستد نیز مشاهده می کنیم که همه اشیا، از جمله آن دو گوی سبک و سنگین که اصطکاک خیلی کمی با سطح دارند، با شتاب یکسان به جلو رانده می شوند. نکته مهم در همه این مثال ها این است که اولا نیروی اینرسیال نیرویی است که در یک چارچوب شتابدار ظهور می کند و ثانیا نیروی اینرسیال همواره متناسب با جرم است. خاصیت مهم نیروی ماند یا اینرسیال این است که همواره می توان با رفتن به یک چارچوب مرجع مناسب اثر آن را خنثی کرد. این کار دقیقا به این دلیل امکان پذیر است که همه اجسامی که تحت تاثیر چنین نیرویی قرار گرفته اند با یک شتاب حرکت می کنند. بنابراین همواره می توان چارچوبی را اختیار کرد که در آن این شتاب برابر با صفر باشد و در نتیجه چنین نیرویی مشاهده نشود. در مثال قطاری که حرکت می کند، این چارچوب همان ایستگاه قطار است. در مورد نیروهای دیگر مثل نیروی الکترومغناطیسی هرگز چنین چیزی امکان پذیر نیست.

۳ اصل ماخ

حال به یک سوال بنیادی می رسیم و آن اینکه قطار نسبت به چه چارچوبی شتاب گرفته است؟ در پاسخ می گوییم که قطار نسبت به چارچوب مرجع ساکن در ایستگاه که یک چارچوب لخت است شتاب گرفته است. اما ممکن است بپرسید به چه دلیل چارچوب متصل به ایستگاه زمینی قطار را لخت می دانیم؟ به این سوال می توان به دو صورت پاسخ داد: پاسخ اول این است که چارچوب لخت چارچوبی است که نسبت به ستارگان ثابت باشد و با تقریب خوبی ایستگاه قطار نسبت به ستارگان ثابت است. در واقع این تعریف برای دستگاه لخت یک تعریف رایج از زمان نیوتن بوده است: ستارگان بر خلاف سیارات در فضا ثابت اند و هر چارچوبی که نسبت به آنها ساکن باشد یا نسبت به آنها با سرعت ثابت حرکت کند،

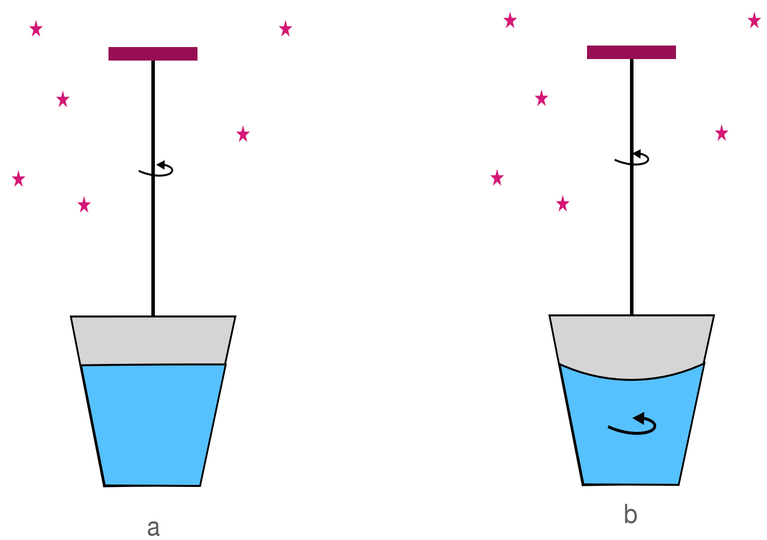
[۳] Inertial Force

یک چارچوب لخت را تعریف می کند. پاسخ دوم که البته به پاسخ اول مربوط است این است که می توانیم با آزمایش تعیین کنیم که آیا این چارچوب لخت است یا نه. برای این کار آزمایش می کنیم تا ببینیم آیا جسمی که تحت تاثیر هیچ نیرویی نیست حالت سکون یا حرکت مستقیم الخط یکنواخت خود را حفظ می کند یا نه. اگر حفظ کرد، آنگاه حکم می کنیم که چارچوب مورد نظر ما لخت است. اما از کجا می دانیم که هیچ نیرویی بر این جسم وارد نمی شود؟ پاسخ اش این است که جسم مورد نظر را به اندازه کافی از هر جسم دیگری که می تواند روی آن تاثیر بگذارد دور می کنیم تا مطمئن شویم که هیچ نیرویی بر آن وارد نمی شود. بنابراین چارچوب لخت چارچوبی است که نسبت به ستارگان ثابت (یا در واقع نسبت به کل کیهان) ساکن باشد یا حرکت یکنواخت مستقیم الخط داشته باشد. در نتیجه قطاری که شروع به حرکت می کند نسبت به ستارگان ثابت شتاب گرفته و بنابراین یک چارچوب لخت نیست بلکه یک چارچوب شتابدار است و در این چارچوب شتابدار نیروهای اینرسیال ظاهر می شوند. دراین مرحله است که ارنست ماخ فیزیکدان و فیلسوف اتریشی به بحث ما می پیوندد. بنابه نظر او اگر قطار را ساکن نگاه داریم و کلیه ستارگان ثابت را در جهت عکس به حرکت درآوریم بازهم همان نیروهای اینرسیال بر اجسام درون قطار ظاهر خواهند شد و گوی ها را با شتاب ثابت به حرکت در خواهند آورد. در واقع ماخ هیچ نوع اصالتی برای فضای مطلق قایل نیست و از نظر او همه حرکت ها مطلقا و کاملا نسبی هستند. از دید او حرکت نسبی و هماهنگ همه اجرام سماوی می تواند بر حرکت یک جسم یا گوی درون قطار اثر بگذارد و این اثر به صورت یک نیروی اینرسیال ظاهر می شود. این دیدگاه آن چیزی است که به آن اصل ماخ [۴] می گوییم.

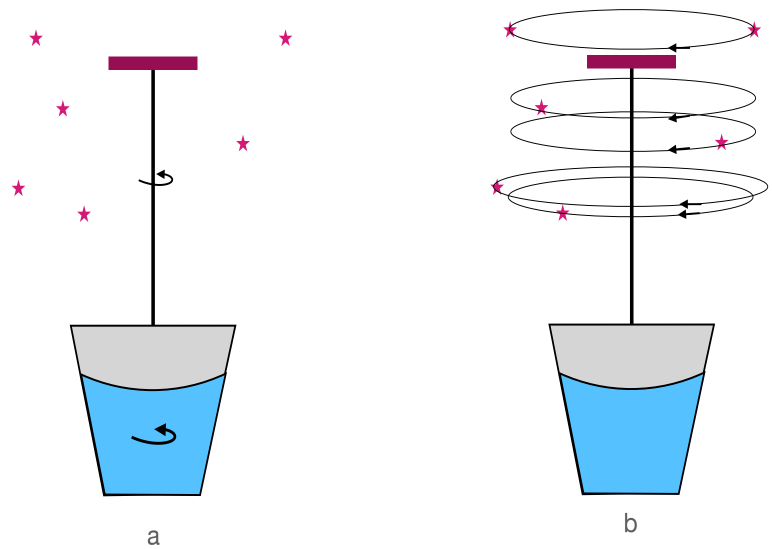
بهتر است کمی در باره اصل ماخ تعمق کنیم. اصل نسبیت گالیله یا نیوتن بیان می کند که حرکت مستقیم الخط یکنواخت در فضای مطلق قابل شناسایی نیست. یعنی اگر در درون اتاقکی قرار گرفته باشیم که حرکت مستقیم الخط یکنواخت دارد نمی توانیم با هیچ آزمایش فیزیکی نتیجه بگیریم که آیا این اتاقک ماست که دارد نسبت به محیط اطراف (ایستگاه زمین، ستارگان ثابت،...) حرکت می کند یا اینکه ما ساکن ایستاده ایم و این محیط اطراف است که نسبت به ما در جهت عکس حرکت می کند. این چیزی است که همواره، به خصوص در ایستگاه های قطار به صورت بلاواسطه مشاهده می کنیم. بنابراین حرکت مستقیم الخط یکنواخت در فضای مطلق قابل شناسایی نیست و تنها می توان حرکت نسبی را تشخیص داد. اما بر خلاف این حرکت، نیوتن بر آن بود که حرکت شتابدار را می توان در فضای مطلق شناسایی کرد. یعنی اگر در درون اتاقی قرار گرفته باشیم که از درونِ آن حتی راهی برای مشاهده محیط پیرامون خود نداشته باشیم بازهم می توانیم با انجام آزمایش بفهمیم که آیا این ما هستیم که حرکت شتابدار داریم یا محیط اطراف ماست که در جهت عکس حرکت شتابدار دارد. کافی است به گوی ها و اجسام نگاه کنیم. هر گاه نیروهای ماند بر آنها وارد نشوند، به معنای آن است که دستگاه ما شتابدار نیست. در غیر این صورت دستگاه ما شتابدار است. به این معنا و بر خلاف حرکت یکنواخت مطلق، همواره می توان شتاب مطلق را (یعنی شتاب نسبت به فضای مطلق) تعیین کرد. برای تایید نظر خود، نیوتن آزمایش مشهوری را پیشنهاد کرده که امروزه به آزمایش سطل آب نیوتن مشهور است. سطلی پر از اب را در نظر بگیرید که از یک ریسمان بلند

---
[۴] Mach's Principle

آویزان شده است. حال به آرامی سطل را می چرخانیم. در ابتدا حرکت سطل به آبی که درون آن قرار دارد منتقل نشده است. آب درون سطل نسبت به چارچوب مرجع سطل دارای شتاب دورانی است. با این وجود سطح آب هم چنان یک سطح صاف و افقی است. به تدریج که در اثر اصطکاک شتاب سطل به آب نیز منتقل می شود و آب همراه با سطل شروع به چرخش می کند، سطح آب به صورت یک سهمی گود می شود. بنابر نظر نیوتن، این گود شدن و ظاهر شدن نیروهای ماند (گریز از مرکز) که قطرات آب را به طرف دیواره های ظرف می رانند نشانه آن است که آب نسبت به فضای مطلق شتاب گرفته است. دلیل صاف بودن سطح آب نیز در لحظات ابتدایی این است که آب، اگر چه نسبت به چارچوب سطل شتاب دورانی دارد، اما هنوز نسبت به فضای مطلق شروع به چرخش نکرده و نسبت به آن شتاب نگرفته است. (شکل های (۱)) و (۲). استدلال نیوتن و این آزمایش سطل آب که در کتاب او به نام اصول ریاضی فلسفه طبیعی (۱۶۸۶ میلادی) آورده شده،استدلال بسیار زیبا و قانع کننده ای است. اما این آزمایش و ایده فضای مطلق مباحثات فراوانی را در دهه ها و سده های بعدی برانگیخته است. گوتفرید لایب نیتز، ایمانوئل کانت، جورج بارکلی،ساموئل کلارک، و بالاخره ارنست ماخ معتقدند که اصولا هر نوع حرکتی از لحاظ فلسفی تنها و تنها نسبت به اشیاء پیرامونی است که قابل شناسایی است و نمی توان به هیچ طریقی حرکت یک شی را نسبت به فضای مطلق و خالی درک کرد. به خصوص در مورد آزمایش سطل آب نیوتن نیز، نظر ارنست ماخ این است که تنها چیزی که این آزمایش ثابت می کند این است که آب نسبت به ستارگان ثابت شتاب گرفته و به همین دلیل سطح آن گود شده است. اگرچه ما نمی توانیم چنین آزمایشی را انجام دهیم، اما اگر سطل آب را ثابت نگاه داریم و همه ستارگان ثابت را در جهت عکس به چرخش درآوریم، بازهم سطح آب گود خواهد شد، چرا که تنها چیزی که اهمیت دارد و با معناست، همان حرکت نسبی بین سطل آب و ستارگان ثابت است.



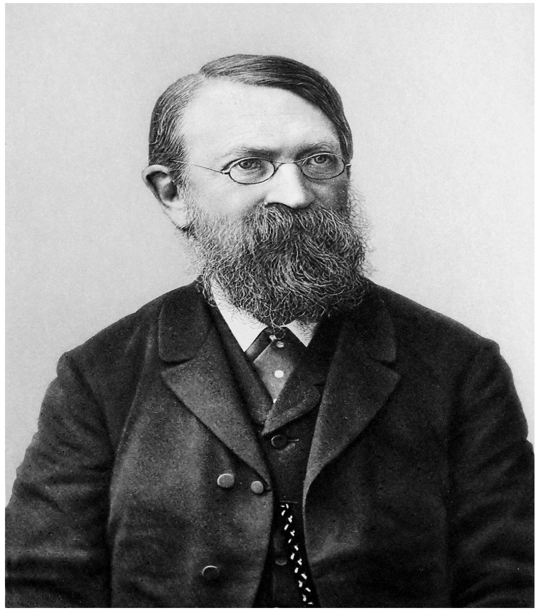
شکل ۱: سمت چپ: سطل شروع به حرکت کرده ولی هنوز اصطکاک آب شروع به چرخش نکرده و سطح آن صاف است. سمت راست: آب شروع به چرخش کرده و سطح آن گود شده است. تفسیر نیوتن از این آزمایش این است: شتاب نسبی آب نسبت به چارچوب مرجع سطل، باعث گود شدن سطح آب نشده بلکه شتاب آن نسبت به ستارگان ثابت است که این اتفاق را سبب شده .



شکل ۲: سمت چپ: تفسیر نیوتن از گودشدگی سطح آب: چرخش آب نسبت به ستارگان ثابت و شتاب نسبت به این چارچوب یا همان فضای مطلق، یک اثر فیزیکی قابل شناسایی است. سمت راست: تفسیر ماخ: تنها چیزی که مشاهده می شود چرخش آب نسبت به ستارگان است. اگر ستارگان در جهت عکس هم بچرخند و آب ثابت باشد، بازهم سطح آب گود خواهد شد.

این دیدگاه که تنها شتاب نسبی است که معنا دارد و در نتیجه لخت بودن یا نبودن یک چارچوب و اینرسی ای که اشیاء در یک چارچوب لخت از خود نشان می دهند به توزیع ماده و حرکت آن در کل عالم بستگی دارد، امروزه به نام اصل ماخ شناخته می شود. طبیعی است که نمی توان با انجام آزمایش در باره درستی دیدگاه ماخ یا نیوتن حکم کرد.

دیدگاه ماخ از نظر فیزیکی و فلسفی الهام بخش اینشتین در تدوین نظریه نسبیت بوده است. از کلمه «الهام بخش» استفاده می کنیم به این معنا که مثل نظریه نسبیت خاص نمی توان آن را به عنوان یک اصل موضوع با فرمول بندی ریاضی در نظر گرفت که مبنای صورت بندی نظریه نسبیت عام قرار گرفته باشد. اما رد پا و اثر آن را در فرمول بندی نهایی نسبیت می توان دید به این معنا که انحنای ایجاد شده در یک نقطه از فضازمان ناشی از توزیع ماده در کل جهان است و این انحناست که نهایتا حرکت یک ذره را درون فضا زمان تعیین می کند.



شکل ۳: ارنست ماخ، فیزیکدان و فیلسوف اتریشی (۱۸۳۸ـ۱۹۱۶).

۴ اصل هم ارزی

ریشه اصل هم ارزی یک مشاهده خیلی ساده ولی در عین حال عمیق و بنیادی است و آن تساوی جرم گرانشی و جرم اینرسی است. این تساوی باعث می شود که تمامی اجسام در یک میدان گرانشی با شتاب یکسانی سقوط کنند. این آزمایش نخستین بار توسط گالیله (۱۵۶۴ـ۱۶۴۲) انجام شد. وسایل آزمایشی او بسیار ساده و در عین حال بسیار نبوغ آمیز بودن: چند توپ از جنس های مختلف، یک سطح شیبدار، یک ساعت آبی برای اندازه گیری زمان و یک پاندول . این آزمایش بعدها توسط افراد دیگر و با دقت بیشتر تکرار شده است. از جمله توسط کریستین هویگنس (۱۶۲۹ـ۱۶۹۵) ، فردریش بسل (۱۷۸۴ـ۱۸۴۶) ، رولند فون آتووش (۱۸۸۹) و رابرت دیکی (۱۹۶۴). امروزه می دانیم که با دقتی در حدود ۱ روی 10^{11} جرم گرانشی با جرم اینرسی برابر است. بنابراین مجموعه آزمایش هایی که این تساوی را سنجیده اند زمانی به اندازه سیصد و پنجاه سال را در بر می گیرد. امروزه و با پیشرفت فناوری دقت این آزمایش بازهم بیشتر شده و می توان در تصاویر ضبط شده از ازمایش ها دید که در غیاب اصطکاک پر یک پرنده و یک وزنه سنگین هر دو باهم از ارتفاع سقوط می کنند.

نتیجه شهودی این مشاهده این است که احتمالا گرانش نه یک نیروی واقعی مثل نیروی الکترومغناطیس، بلکه یک نیروی اینرسیال است که در بخش گذشته آن را معرفی کردیم. اگر این را بپذیریم معنایش این است که همواره می توان به چارچوبی رفت که این نیرو یعنی نیروی گرانش در آن وجود نداشته باشد و واقعا هم چنین است. اگر در یک آسانسور در حال سقوط باشیم، همه اجرام شناور و در حالت بی وزنی خواهند بود و اثری از نیروی گرانش دیده نمی شود. این وضعیت در ایستگاه های فضایی یا در هواپیماهایی آموزشی که سقوط آزاد انجام می دهند نیز قابل مشاهده است. در چنین چارچوب هایی نیروی گرانش دیده نمی شود و قوانین فیزیک همان قوانینی هستند که در غیاب گرانش تدوین شده اند، یعنی معادلات دینامیک نسبیت خاص و معادلات ماکسول و نظایر آن. به طور مشخص تر، مجموعه ای از ذرات را در نظر بگیرید که تحت تاثیر نیروهای متقابلی که بین آنها وجود دارد قرار گرفته اند و همگی نیز تحت تاثیر نیروی گرانش هستند. در این حالت معادله حرکت آنها در دستگاه مختصات ساکن نسبت به زمین یا هر میدان گرانشی ای شده است، چنین است:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = mg + \sum_{j\neq i} f(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i). \qquad (۱)$$

حال همین مجموعه را در یک دستگاه مختصات متفاوت که به صورت زیر تعریف می شود در نظر می گیریم:

$$\mathbf{r'}_i = \mathbf{r}_i - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (۲)$$

در این صورت داریم:

$$\frac{d^2\mathbf{r'}_i}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} - g \qquad (۳)$$

و

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r'}_i - \mathbf{r'}_j. \qquad (۴)$$

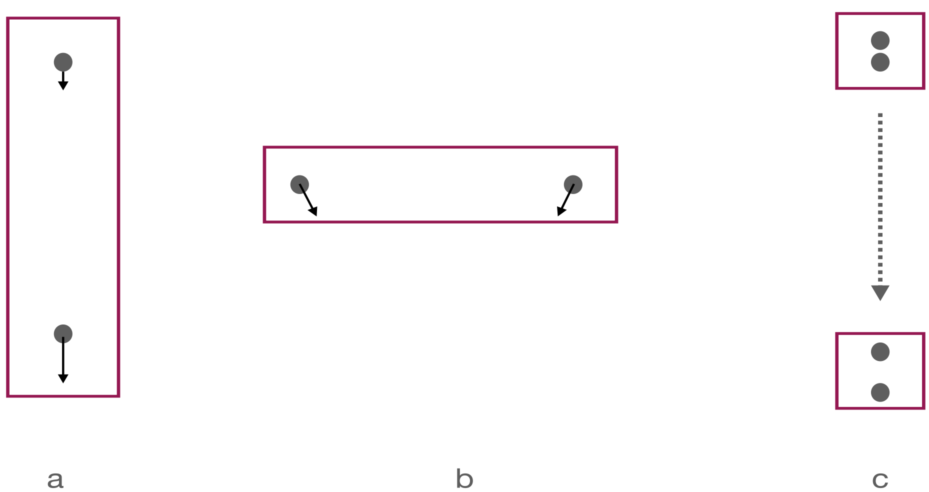
با جایگذاری این مختصات می بینیم معادلات حرکت در این چارچوب برابر است با

$$m\frac{d^2\mathbf{r'}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i} f(\mathbf{r'}_j - \mathbf{r'}_i), \qquad (۵)$$

که نشان می دهد در این چارچوب جدید، هیچگونه نیروی گرانشی وجود ندارد و ذرات تنها تحت تاثیر نیروهای بین خود هستند. البته اصل هم ارزی از این فراتر می رود و آن اینکه بیان می کند همواره می توان در یک میدان گرانش چارچوبی در نظر گرفت که در آن چارچوب، همه قوانین

فیزیکی علاوه بر قوانین حرکت ذرات (یعنی قوانین مربوط به امواج، میدان های الکتریکی و مغناطیسی و نظایر آن) تبدیل به قوانین فیزیک در غیاب گرانش شوند. طبیعتا در این جا یک نکته اساسی وجود دارد و آن اینکه چارچوب هایی که در میدان گرانش آزادانه سقوط می کنند می بایست بسیار کوچک باشند، هم در ابعاد فضایی و هم در ابعاد زمانی. چرا که اگر آسانسور در حال سقوط ارتفاع یا پهنای زیادی داشته باشد یا اینکه مدت زمان زیادی در سقوط آزاد قرار بگیرد، آنگاه دیگر نمی توان آن را با یک دستگاه لخت یا دستگاهی که در آن گرانش دیده نمی شود یکی گرفت. این وضعیت در شکل (۴) نشان داده شده است. به این ترتیب به صورت بندی اصل هم ارزی می رسیم به شکلی که بتواند سنگ بنای یک نظریه ریاضی قرار بگیرد:

- **اصل هم ارزی:** [۵] در هر نقطه از فضا زمان همواره می توان دستگاه مختصات موضعی ای اختیار کرد که در آن دستگاه مختصات، قوانین فیزیک همان قوانین فیزیک ِ منهای گرانش باشند.



شکل ۴: اگر آسانسور ارتفاع زیاد داشته باشد، دو جسم که در دو انتهای آسانسور قرار دارند یک نیروی دافعه بین خود حس می کنند. اگر آسانسور پهنای زیاد داشته باشد، دو جسم که در دو انتهای آسانسور قرار دارند یک نیروی جاذبه بین خود حس می کنند. حتی اگر آسانسور بی نهایت کوچک باشد ولی زمان زیادی در حال سقوط باشد، دو جسم به تدریج از هم دور شده و نیروی دافعه ای بین خود حس می کنند. بنابراین تنها با رفتن به یک چارچوب موضعی بسیار کوچک می توانیم نیروی گرانش را خنثی کنیم.

---

[۵] Principle Equivalent

۵ اصل هموردایی

اصل نسبیت اینشتین که زیربنای نسبیت خاص است بیان می کند که همه چارچوب های لخت، تا جاییکه به قوانین فیزیک مربوط می شود، همانند هستند به این معنا که قوانین فیزیک می بایست چنان نوشته شوند که در چارچوب های لخت گوناگون شکل یکسانی داشته باشند. از آنجا که چارچوب های گوناگون با تبدیلات لورنتز (برخاسته از ثابت بودن سرعت نور) به هم مربوط اند، پس قوانین فیزیکی می بایست تحت تبدیلات لورنتز ناوردا باشند. از نظر ریاضی معنایش این است که همه قوانین فیزیک می بایست به شکل تساوی بین تانسورهای لورنتزی نوشته شوند. در نسبیت عام این ناوردایی و این اصل به همه چارچوب ها تعمیم داده می شود به این معنا که قوانین فیزیک در همه چارچوب ها، چه لخت و چه شتابدار (که در واقع با توجه به اصل ماخ معنای مطلق خود را از دست داده اند) می بایست یکسان نوشته شوند. به همین جهت این قوانین می بایست به شکل تساوی تانسورهای کلی تری نوشته شوند، یعنی تانسورهایی که نه تنها تحت تبدیلات لورنتز بلکه تحت همه تبدیلات مختصات به شکل صحیح تبدیل شوند. یعنی این قوانین می بایست به شکل تساوی تانسورهایی نوشته شوند چون

$$A^{\mu\nu} = B^{\mu\nu} \qquad \text{یا} \qquad A^{\mu\nu} - B^{\mu\nu} = 0, \tag{۶}$$

که تحت تبدیلات کلی

$$x^{\mu} \longrightarrow x^{\mu'} \tag{۷}$$

شکل خود را حفظ کنند. تحت تبدیلات کلی چنین تانسورهایی به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$A^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}A^{\mu\nu}, \qquad B^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}B^{\mu\nu}. \tag{۸}$$

در نتیجه معادله (۶) به معادله زیر تبدیل می شود.

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\Big(A^{\mu\nu} - B^{\mu\nu}\Big) = 0 \tag{۹}$$

اگر A و B تانسور باشند، این معادله برای هر تبدیل مختصاتی برقرار است و در نتیجه باز هم به معادله زیر می رسیم

$$A^{\mu'\nu'} - B^{\mu'\nu'} = 0. \tag{۱۰}$$

که نتیجه اش این است که معادله (۶) شکل خود را تحت تبدیل مختصات حفظ کرده است.

۶ حرکت ذره آزاد: ژئودزی

ذره ای را در نظر بگیرید که در یک میدان گرانش سقوط می کند. در این جا معنای سقوط خیلی کلی است یعنی یا به طرف مرکز نیروی گرانش سقوط می کند یا اینکه یک مدار بیضوی طی می کند. می خواهیم بدانیم معادله حرکت مسیر این ذره چگونه است. مختصات مورد نظر خود را با $x^\mu = (ct, x, y, z)$ نشان می دهیم. مثل همیشه دستگاه واحدهایی به کار می بریم که در آن سرعت نور برابر با یک باشد. برای بدست آوردن معادله حرکت این ذره از اصل هم ارزی استفاده می کنیم. می دانیم که حتما مختصاتی مثل ξ^μ وجود دارد که در آن مختصات، نیروی گرانش وجود ندارد . از آنجا که فرض کرده ایم ذره تنها در میدان گرانشی است، پس در این دستگاه خاص که گرانش در آن حذف شده ذره کاملا آزاد است. در این دستگاه مختصات قوانین فیزیک همان قوانین فیزیک تحت نسبیت خاص هستند، یعنی متریک فضا زمان همان متریک مینکوفسکی است و این ذره حرکت مستقیم الخط یکنواخت خود را انجام می دهد. این مختصات را با ξ^μ نشان می دهیم. در این مختصات، متریک فضازمان متریک مینکوفسکی $\eta_{\mu\nu}$ و معادله حرکت این ذره عبارت است از:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = 0. \qquad (۱۱)$$

در این معادله τ زمان ویژه ذره است که یک پارامتر ناورداست:

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu. \qquad (۱۲)$$

حال می خواهیم معادله حرکت این ذره را در یک دستگاه مختصات دلخواه که آن را با x^μ نشان می دهیم، پیدا کنیم. برای این کار توجه می کنیم که

$$\frac{d\xi^\mu}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{dx^{\mu'}}{d\tau}. \qquad (۱۳)$$

پس از یک بار دیگر محاسبه مشتق به نتیجه زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{dx^{\mu'}}{d\tau}\Big) \\ &= \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\mu'}} \frac{dx^{\nu'}}{d\tau} \frac{dx^{\mu'}}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{d^2 x^{\mu'}}{d\tau^2} = 0 \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

با ضرب کردن طرفین در $(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial \xi^\mu})$ و جمع روی μ به رابطه زیر می رسیم که معادله حرکت ذره را در مختصات اولیه نشان می دهد:

$$\frac{d^2 x^{\alpha'}}{d\tau^2} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^{\nu'}\partial x^{\mu'}}\frac{dx^{\nu'}}{d\tau}\frac{dx^{\mu'}}{d\tau} = 0 \tag{۱۵}$$

پارامتر τ نیز از رابطه (۱۲) برحسب مختصات اولیه بدست می آید:

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial \xi^\mu}{x^\alpha}\frac{\partial \xi^\nu}{x^\beta} dx^\alpha dx^\beta =: g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{۱۶}$$

اما معادله (۱۵) چه چیزی را نشان می دهد؟ برای یافتن پاسخ این سوال به این توجه می کنیم که که بنا بر اصل هم ارزی، چارچوب x^μ چارچوبی است که در آن متریک برابر با $\eta_{\mu\nu}$ و همبندی برابر با صفر است. اما می دانیم که همبندی در یک دستگاه مختصات دلخواه از رابطه زیر بدست می آید:

$$\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} \tag{۱۷}$$

که بر مبنای آن مولفه های همبندی برابر خواهند شد با

$$\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}. \tag{۱۸}$$

در نتیجه معادله حرکت ذره به شکلی که در رابطه (۱۵) بدست آوردیم به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^2 x^{\alpha'}}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha'}{}_{\mu'\nu'}\frac{dx^{\nu'}}{d\tau}\frac{dx^{\mu'}}{d\tau} = 0. \tag{۱۹}$$

این معادله چیزی نیست جز معادله ژئودزی. به این ترتیب تنها با استفاده از اصل هم ارزی به یک نتیجه مهم دست پیدا کرده ایم. مسیر حرکت هر ذره ای که تنها تحت تاثیر نیروی گرانش قرار دارد یک مسیر ژئودزی است. بنابراین با داشتن متریک فضازمان می توانیم معادلات (۱۹) و (۱۶) را حل کنیم و مسیر حرکت ذره را به طور کامل بدست آوریم.

۱.۶ معادله حرکت یک ذره در میدان های گرانشی ضعیف

اگر این ملاحظات صحیح باشند می بایست در حد گرانش ضعیف معادله حرکت یک ذره تبدیل به معادله حرکت یک ذره در حضور میدان گرانش نیوتنی شود. در واقع اگر پتانسیل گرانشی را با ϕ نشان دهیم می بایست معادله حرکت روی ژئودزی، در حد میدان های ضعیف تبدیل شود به معادله زیر:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\phi. \tag{۲۰}$$

این اولین معیار ی است که نشان می دهد اصل هم ارزی نقطه شروع مناسبی برای توصیف گرانش است. برای این کار نخست می بایست ببینیم میدان ضعیف چگونه میدانی است. برای میدان های ضعیف انتظار داریم که متریک به صورت

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{۲۱}$$

باشد به نحوی که مولفه های $h_{\mu\nu}$ بسیار کوچک باشند و بتوان از توان دوم آنها صرف نظر کرد. به معادله حرکت نگاه می کنیم و با توجه به این که از $v^m = \frac{dx^m}{d\tau}$ می توان در مقایسه با $v^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{cdt}{d\tau} \approx c$ صرف نظر کرد، این معادله به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \frac{dv^m}{d\tau} &= -\Gamma^m_{00} v^0 v^0 = -g^{mn}\Gamma_{n00} v^0 v^0 \\ &= \frac{1}{2} g^{mn} g_{00,n} v^0 v^0 \approx \frac{1}{2}\eta^{mn} h_{00,n} c^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^m} h_{00} c^2, \end{aligned} \tag{۲۲}$$

و یا با توجه به تقریب $dt \approx d\tau$:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \frac{1}{2} c^2 h_{00} \tag{۲۳}$$

به این ترتیب و با مقایسه این معادله حرکت با (۲۰) معلوم می شود که در حد میدان های ضعیف، متریک به صورت زیر است:

$$g_{00} \approx 1 + 2\frac{\phi}{c^2}. \tag{۲۴}$$

از این رابطه می توانیم نتیجه مهمی استخراج کنیم و این نتیجه را با آزمایش مطابقت دهیم. این در واقع اولین نتیجه تجربی نظریه نسبیتی گرانش بوده است و انتقال فروسرخ گرانشی [۶] نام دارد.

۷ انتقال فروسرخ گرانشی

ساعتی را در نظر بگیرید که در یک میدان گرانشی مسیری را تحت اثر نیروی گرانش طی می کند (یا سقوط می کند). مطابق با اصل هم ارزی در چارچوبی که همراه با این ساعت حرکت می کند (یا آسانسوری که همراه با آن سقوط می کند)، گرانش غایب است و قوانین فیزیک همان قوانین

[۶] Gravitational Red Shift

نسبیت خاص هستند. مختصات این چارچوب را با ξ^μ نشان می دهیم. در این دستگاه مختصات، متریک همان $\eta_{\mu\nu}$ است و فاصله بین دو رویداد از رابطه زیر حساب می شود:

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu. \tag{۲۵}$$

این زمان ویژه را می توانیم بر حسب مختصات ثابت در میدان گرانش که آن را با x^α نشان می دهیم، نیز بیان کنیم. حاصل عبارت است از:

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{۲۶}$$

اگر این دو رویداد، رویدادهای تیک تیک ساعت باشند که در این صورت مکان هر دو رویداد یکی است از دو رابطه پیشین بدست می آوریم:

$$d\tau^2 = dT^2, \qquad d\tau^2 = g_{00} dt^2 \tag{۲۷}$$

که در آن dT فاصله زمانی بین دو تیک تاک ساعت درون آسانسور و dt فاصله زمانی بین دو تیک تاک در میدان گرانشی است. بنابراین بدست می آوریم:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} dT. \tag{۲۸}$$

اما dT فاصله زمانی بین دو تیک تاک در غیاب میدان گرانش است، چون این فاصله زمانی بین دو تیک تاک در درون آسانسور در حال سقوط است که گرانشی در آن نیست. خود این رابطه را نمی توان به تست تجربی سپرد، اما می توانیم یک نتیجه مهم از آن بگیریم و آن مقایسه نرخ تیک تاک ها در دو نقطه مختلف در میدان گرانشی است. در واقع از این رابطه می توانیم بدست آوریم:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_2)}{g_{00}(x_1)}}. \tag{۲۹}$$

که در آن Δt_1 و Δt_2 به ترتیب فاصله زمانی بین دو تیک تاک در نقاط x_1 و x_2 در یک میدان گرانشی هستند. در این رابطه هیچ تقریبی نیست. در میدان گرانشی ضعیف داریم:

$$g_{00} = 1 - 2\frac{\phi}{c^2} \tag{۳۰}$$

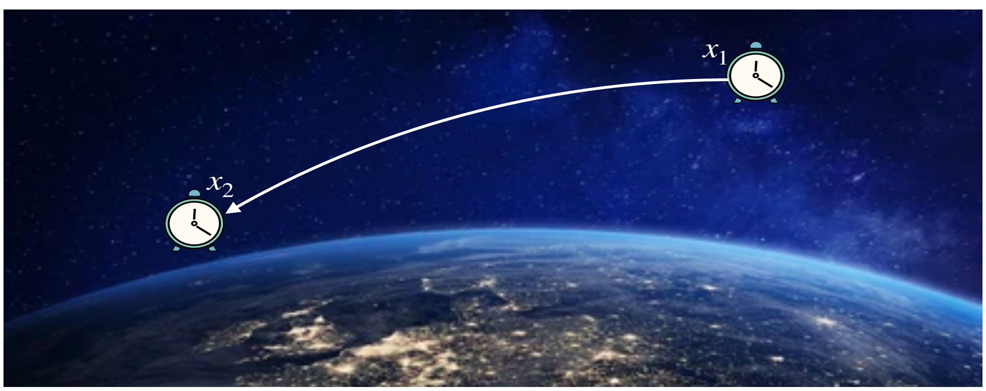
بنابراین رابطه بالا به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \sqrt{\frac{1 - 2\frac{\phi(x_2)}{c^2}}{1 - 2\frac{\phi(x_1)}{c^2}}} \approx \frac{1 - \frac{\phi(x_2)}{c^2}}{1 - \frac{\phi(x_1)}{c^2}} = 1 + \frac{\phi(x_1) - \phi(x_2)}{c^2}. \tag{۳۱}$$

به عبارت دیگر هرچه میدان گرانش قوی تر باشد، یک ساعت کند تر می شود، یعنی ساعت ها در میدان گرانش کند می شوند. اگر این فاصله های زمانی مربوط به دوره های تناوب نور باشند، آنگاه با نوشتن $\Delta t_1 = \nu_1^{-1}$ و $\Delta t_2 = \nu_2^{-1}$ به رابطه زیر می رسیم:

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} = \frac{\phi(x_1) - \phi(x_2)}{c^2}. \qquad (۳۲)$$

به عبارت دیگر هر چقدر که نور به پتانسیل های بالاتر گرانشی برود، فرکانس آن کمتر و طول موج آن بیشتر خواهد شد. یعنی اگر یک شعاع نوری را از زمین به طرف بالا بتابانیم، وقتی به بالا می رسد طول موج آن اندکی به سمت طول موج سرخ میل کرده است. این اثر را انتقال فروسرخ گرانشی می نامند و می توان آن را به محک تجربه سپرد. توجه به این نکته بسیار مهم است که این نتیجه تنها و تنها از اصل هم ارزی بدست آمده است یعنی وقتی که هنوز هیچ چیز در باره چگونگی ایجاد میدان گرانش توسط ماده نمی دانیم.



شکل ۵: کند شدن ساعت ها د رمیدان گرانشی یا انتقال فروسرخ گرانشی.

۱.۷ تحقیق تجربی انتقال به سرخ گرانشی

انتقال فروسرخ گرانشی را می توان به شیوه های متفاوت به تحقیق تجربی و آزمایشگاهی سپرد. حداقل دو راه برای چنین اندازه گیری هایی وجود دارد، یک راه طیف سنجی نوری است که از ستارگان به زمین می رسد و دیگری انجام آزمایش به طور کامل در روی زمین.

۱.۱.۷ طیف سنجی نور خورشید

نخست به طیف نوری که از خورشید ساطع می شود و اندازه گیری ان در روی زمین می پردازیم. در این جا می توان از پتانسیل ایجاد شده توسط جاذبه زمین صرف نظر کرد و تنها جاذبه خورشید را در نظر گرفت. اگر x_1 را مکان خورشید و x_2 را مکان زمین در نظر بگیریم، داریم:

$$\phi(x_1) = -\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}} \tag{۳۳}$$

که در آن $M_{\odot}$ و $R_{\odot}$ به ترتیب جرم و شعاع خورشید هستند. با توجه به این که فاصله زمین تا خورشید بسیار بزرگتر از شعاع خورشید است می توان $\phi(x_2)$ را عملا برابر با صفر گرفت. با توجه به اینکه

$$R_{\odot} = 6.95 \times 10^8\ m \qquad M_{\odot} = 1.95 \times 10^{30}\ Kg, \qquad G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 Kg^{-1} s^{-2} \tag{۳۴}$$

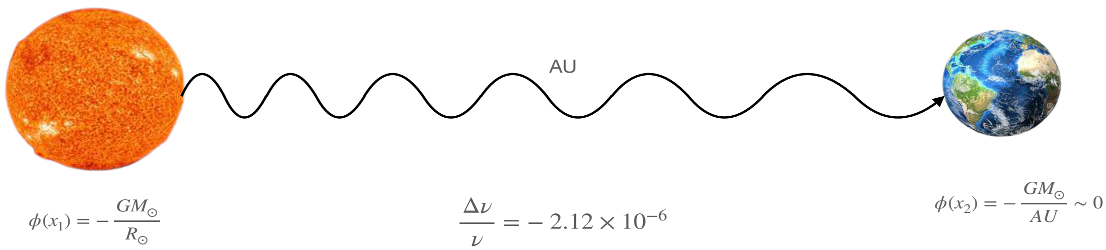
بدست می آوریم

$$\frac{\phi(x_1)}{c^2} = -2.12 \times 10^{-6}. \tag{۳۵}$$

که به معنای آن است که

$$\frac{\nu(at\ sun) - \nu(at\ earth)}{\nu(at\ earth)} = -2.12 \times 10^{-6} \tag{۳۶}$$

بنابراین انتظار داریم که فرکانس یک خط طیفی که از خورشید ساطع شده و به ما می رسد در مقایسه با فرکانس همان خط طیفی که از نور ایجاد شده در زمین می بینیم به اندازه نسبی 2×10^{-6} کم شود و مکان این خط طیفی در طیف سنج به سمت نور قرمز جابجا شود، شکل (۶).



شکل ۶: نوری که از خورشید ساطع می شود تا به سطح زمین برسد فرکانس اش کم شده و طول موج آن زیاد می شود. برای اندازه گیری دقیق این انتقال می بایست به نوری که از لبه های خورشید ساطع می شود نگاه کرد.

البته اندازه گیری چنین جابجایی ای چندان آسان نیست. نخست اینکه می بایست جابجایی دوپلری ناشی از حرکت انتقالی و وضعی زمین را در نظر گرفت و آن را از میزان مشاهده شده کم کرد. این کار چندان سخت نیست و قابل انجام است. دوم این که گرمای ۶۰۰۰ درجه سطح خورشید باعث سرعت زیاد اتم های سطح خورشید شده و خطوط طیفی ساطع شده پهنای دوپلری [۷] پیدا می کنند. البته این اثر باعث جابجایی خطوط طیفی نمی شود و تنها آنها را پهن می کند. به همین دلیل اشکالی جدی در اندازه گیری ها ایجاد نمی کند اگر چه اندازه گیری دقیق را کمی دشوار تر می سازد. اما اثر سوم خیلی مهم است و آن وقتی است که توده های بزرگ گاز در اثر تلاطمی که در سطح خورشید وجود دارد دچار همرفت شده و حرکت می کنند. این حرکت باعث جابجایی دوپلری خطوط طیفی می شود که اثرات انتقال به سرخ گرانشی پنهان شود. راه مقابله با این اثر این است که به نور ساطع شده از لبه های خورشید نگاه کرد . در لبه های خورشید همرفتی هم اگر وجود داشته باشد، در جهت عمود بر خط دید است و بنابراین اثر دوپلری باعث پنهان کردن انتقال به سرخ گرانشی نمی شود. اندازه گیری هایی که تا کنون و با ابزار های دقیق انجام شده نشان می دهد که مقدار تجربی و مشاهده شده انتقال به سرخ گرانشی در خطوط طیفی خورشید، $1.05 \pm 0,05$ برابر مقدار پیش بینی شده توسط نظریه گرانش اینشتین است.

می توان به جای خورشید، از نور ساطع شده از کوتوله های سفید [۸] استفاده کرد. جرم این ستاره ها از مرتبه جرم خورشید ولی شعاع آنها بین $\frac{1}{10}$ تا $\frac{1}{100}$ شعاع خورشید است. در نتیجه انتقال سرخ گرانشی در طیف آنها در حدود 10 تا 100 برابر انتقال سرخ گرانشی خورشید است. هم چنین در این نوع ستاره ها اثرات مخربی مثل همرفت توده های گاز در سطح ستاره ها وجود ندارد. اما مسئله این است که جرم دقیق آنها را براحتی نمی

[۷] Doppler Broadening
[۸] White Dwarf

توان تعیین کرد مگر در مواردی که دو ستاره کوتوله سفید در یک سیستم دوتایی به گرد هم می چرخند. در چنین مواردی می توان با تعیین فاصله بین این دو ستاره و سپس اندازه گیری دوره تناوب گردش آنها جرم مجموع آنها را تعیین کرد. البته یک اشکال دیگر وجود دارد و آن اینکه نوری که از یک ستاره ساطع می شود توسط ستاره دیگر پراکنده می شود. بناچار می بایست از سیستم های دوتایی ای استفاده کرد که فاصله شان از هم زیاد باشد، اما فاصله زیاد باعث زیاد بودن دوره تناوب و در نتیجه انتظار طولانی منجمان برای اندازه گیری دوره تناوب آنها می شود. تا کنون با این نوع اندازه گیری ها نیز توافق بسیار خوبی بین مشاهدات و نظریه بدست آمده است.

۲.۱.۷ آزمایش پاوند و ربکا

با توجه به دشواری هایی که در طیف سنجی نوری ستارگان وجود دارد و در بخش قبل به آنها اشاره کردیم، بهترین کار انجام آزمایش کنترل شده در آزمایشگاه های زمینی است. البته به دلیل کوچک بودن فوق العاده $\Delta\phi$ میزان انتقال سرخ فوق العاده کوچک است و برای اندازه گیری آن دقت فوق العاده زیادی لازم است.این آزمایش نخستین بار در ۱۹۵۹ در دانشگاه هاروارد و توسط پاوند و ربکا [۹] انجام شده است. این آزمایش را به اختصار شرح می دهیم. در اتم های ایزوتوپ آهن Fe^{57} یک گذار بین دو لایه اتمی با تفاوت انرژی $\Delta\epsilon = 14.4\ Kev$ وجود دارد که باعث گسیل فوتون هایی با فرکانس $\nu_0 = \frac{\Delta\epsilon}{h}$ می شود. قاعدتا اگر همین فوتون ها به همان ایزوتوپ ها تابیده شوند، توسط گذار معکوس جذب خواهند شد. چنین چیزی جذب تشدیدی [۱۰] نامیده می شود. البته در هر گذاری بین دو لایه اتمی، نور تابش شده و هم چنین جذب شده یک فرکانس خیلی دقیق ندارد بلکه احتمال جذب و تابش فوتون با فرکانس های نزدیک به ν_0 نیز وجود دارد. این احتمال نهایتا به شدت یا تعداد فوتون های گسیل و یا جذب شده مربوط می شود، که می توان آن را به صورت

$$C \propto \frac{\Gamma^2}{(\nu-\nu_0)^2+\Gamma^2}$$

نوشت که در آن Γ پارامتری است که پهنای تابع احتمال یا شدت را تعیین می کند . در آزمایش پاوند و ربکا، فوتون های گسیل شده از اتم های آهن در بالای یک ساختمان به ارتفاع $22.6\ m$ در پایین ساختمان توسط اتم های آهن جذب می شوند. در این جا به دلیل سقوط فوتون ها در میدان گرانش، فرکانس آنها افزایش یافته و این افزایش باعث تغییر در شمارش تعداد فوتون های جذب شده می شود. این تغییر دقیقا همانی است که توسط نظریه نسبیتی گرانش پیش بینی شده است.

■ **تمرین:** مقدار انتقال به سمت آبی را در آزمایش پاوند و ربکا حساب کنید و نشان دهید که $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ برابر است با 2.57×10^{-15}

باید تاکید کنیم که در این جا از بیان جزییات بسیاری صرف نظر کرده ایم. یکی از مهم ترین این جزییات اثر واپس زنی اتم ها بوده به این معنا

[۹] Robert Pound and Glen Rebka
[۱۰] Resonance Absorbtion

که وقتی اتمی با جرم m یک گذار بین دو لایه با اختلاف انرژی $\Delta\epsilon$ انجام می دهد و یک فوتون با انرژی $h\nu$ گسیل می کند، به خاطر بقای تکانه پس زده می شود و مقداری از انرژی $\Delta\epsilon$ به صورت انرژی جنبشی اتم مصرف می شود. در نتیجه در این گذار $h\nu \leq \Delta\epsilon$ است. هم چنین این فوتون وقتی به یک اتم می رسد، آن را پس می زند و مقدار کمتری انرژی برای آن باقی می ماند تا اتم را به لایه بالاتر ببرد. اثرات این پس زنی ها ممکن است آنقدر زیاد باشد که اصولا جذب تشدیدی رخ ندهد. برای خنثی کردن این اثر، از پدیده موسبائر [۱۱] کمک گرفته می شود. اگر اتم های آهن درون یک جامد باشند، تکانه پس زنی به کل جامد منتقل می شود. به دلیل جرم زیاد جامد، سرعت پس زنی جامد بسیار کم است و در نتیجه انرژی ای که نصیب جامد می شود بسیار ناچیز خواهد بود. به این ترتیب پاوند و ربکا موفق شدند که اولا اثبات تجربی را برای انتقال به سرخ گرانشی با آزمایش هایی زمینی به انجام برسانند، شکل (۷) .

شکل ۷: سمت چپ: ساختمان جفرسون با ارتفاع 22.6 متر که آزمایش پاوند و ربکا در آن انجام شد. سمت راست: پاوند در حال تست آزمایش.

[۱۱] Mossbauer Effect

۲.۷ یک استدلال دیگر برای انتقال به سرخ گرانشی

آنچه که در زیر بخش گذشته گفتیم، مبتنی بر کند شدن ساعت ها در میدان گرانش بود که یک نتیجه آن انتقال به سرخ فوتون هایی است که تحت تاثیر میدان گرانش قرار می گیرند. در این استدلال از مکانیک کوانتومی استفاده نشده است. حال می توانیم از مکانیک کوانتومی استفاده کنیم و استدلال دیگری برای انتقال به سرخ فراهم کنیم. می دانیم که فوتونِ با فراکانس ν_1 انرژی $h\nu_1$ دارد. فرض کنید که فوتونی با این فرکانس از یک دستگاه سنگین غیرنسبیتی به جرم m_1 که در نقطه x_1 در میدان گرانش قرار دارد ساطع می شود. سپس این فوتون توسط دستگاه غیر نسبیتی دیگری به جرم m_2 که در نقطه x_2 از میدان گرانش قرار دارد جذب می شود. در این جا فرکانس آن را ν_2 می گیریم و هدف ما تعیین این فرکانس است. مهم است که توجه کنیم در این استدلال به فوتون جرمی نسبت نمی دهیم چون اصولا ایده نسبت دادن جرم به فوتون بدون اشکال نیست. به جای آن به انرژی این دستگاه ها دقت می کنیم. در ابتدا انرژی دستگاه ها برابر است با

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \big(m_1c^2 + m_1\phi(x_1)\big) + \big(m_2c^2 + m_2\phi(x_2)\big)\\ &= m_1(c^2+\phi(x_1)) + m_2(c^2+\phi(x_2))\end{aligned} \tag{۳۷}$$

در انتها انرژی این دستگاه ها برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= \big(m_1'c^2 + m_1'\phi(x_1)\big) + \big(m_2'c^2 + m_2'\phi(x_2)\big)\\ &= m_1'(c^2+\phi(x_1)) + m_2'(c^2+\phi(x_2))\end{aligned} \tag{۳۸}$$

که در آن

$$m_1'c^2 = m_1c^2 - h\nu_1, \qquad m_2'c^2 = m_2c^2 + h\nu_2 \tag{۳۹}$$

انرژی های سکون جدید دستگاه ها هستند. با جایگذاری این روابط، قانون بقای انرژی یعنی تساوی دو انرژی بالا به نتیجه زیر می رسد:

$$\nu_1\Big(1+\frac{\phi(x_1)}{c^2}\Big) = \nu_2\Big(1+\frac{\phi(x_2)}{c^2}\Big) \tag{۴۰}$$

و یا

$$\frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_1} \approx \frac{\phi(x_1)-\phi(x_2)}{c^2} \tag{۴۱}$$

که همان معادله ای است که در ابتدا بدست آوردیم.

۸ مسئله ها:

■ **مسئله اول:** یک پاندول از سقف یک قطار آویزان است. قطار با شتاب ثابت a حرکت می کند. زاویه ای را که پاندول با امتداد عمودی می سازد حساب کنید.

الف- این پدیده را از دید ناظری که بیرون از قطار و روی زمین ایستاده است توصیف کنید.

ب- این پدیده را از دید ناظری که درون قطار ایستاده است توصیف کنید.

پ- یک سطل آب نیز در این قطار وجود دارد. زاویه ای را که سطح آب با سطح افق می سازد پیدا کنید.

■ **مسئله دوم:** یک سطل آب روی که یک سطح شیب دار با زاویه α قرار داده شده، تحت اثر گرانش به طرف پایین می لغزد. زاویه سطح آب را با قاعده سطل پیدا کنید.

■ **مسئله سوم:** مجموعه ای از ذرات را که با هم برهم کنش نمی کنند در نظر بگیرید. این مجموعه که در یک شکل به صورت به شعاع R و به صورت یکنواخت پراکنده شده اند، تحت گرانش زمین سقوط می کنند. شکل این مجموعه ذرات را در زمان t بدست آورید.

■ **مسئله چهارم:** فرض کنید که یک قانون فیزیکی در نسبیت خاص با تانسور پادمتقارنی مثل F_{ab} توصیف شود که در معادله زیر صدق کند:

$$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0. \quad (۴۲)$$

ساده ترین تعمیمی که از این معادله می توانید بدست آورید تا در نسبیت عام هم به عنوان یک قانون فیزیکی معتبر شناخته شود چیست؟ نشان دهید که این معادله نیز در نهایت با معادله بالا یکسان می شود. (راهنمایی: به پادمتقارن تانسور توجه کنید.)

■ **مسئله پنجم:** مسیر یک ذره آزاد در یک چارچوب لخت را در نظر بگیرید. مسیر همین ذره را در یک آسانسور که با شتاب ثابت به سوی بالا حرکت می کند مشخص کنید. با استفاده از اصل هم ارزی نشان دهید که نور در میدان گرانش خم می شود. اگر یک شعاع نور مسافت افقی L را روی سطح زمین طی کند، میزان خم شدن آن (نزدیک شدن به سطح زمین را) پس از طی این مسافت پیدا کند.

■ **مسئله ششم:** در اطراف بعضی از سیاهچاله ها میدان گرانش می تواند آنقدر قوی باشد که حتی نور یک مسیر دایره ای را حول سیاه چاله طی کند. با یک محاسبه ساده (در چارچوب مکانیک نیوتنی) و با قبول اینکه نور در میدان گرانش خم می شود، شعاعی را پیدا کنید که در آن نور یک مسیر دایره ای را حول یک ستاره به جرم M طی می کند. محاسبات نسبیتی دقیق این شعاع را به اندازه $R = \frac{3GM}{c^2}$ تعیین می کند، ولی نتیجه نیوتنی می تواند با این نتیجه متفاوت باشد.